



ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA INECUACIONES

CICLO
PREUNIVERSITARIO
2024-1



¿QUÉ ES UNA INECUACIÓN?

Idea:

Es la comparación entre dos expresiones matemáticas, que tienen al menos una variable en común, mediante los símbolos de desigualdad.

Ejemplos de inecuaciones

1. $x - 5 < 2x - 10$

2. $x^2 - 1 \leq x + 2$

3. $e^{2x-1} > x$

4. $x^2 + y^2 \geq 2x + 1$

SOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN

Es quel valor que toma la(s) variable(s) [o incógnita(s)] tal que al ser reemplazado en la inecuación, hace que la desigualdad sea verdadera.

Ejemplo

Dada la inecuación $x^2 < x + 12$, notemos:

$x = 1$, **es solución**, dado que la desigualdad $1 < 13$ (V)

$x = -2$, **es solución**, dado que la desigualdad $4 < 10$ (V)

$x = 5$, **no es solución**, dado que la desigualdad $25 < 17$ (F)

INECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Definición:

Una inecuación de primer grado, es aquella que tiene la siguiente forma:

$$ax + b < 0$$

Donde a y b son números reales ($a \neq 0$) y se puede cambiar $<$ por alguna de los símbolos $\leq$, $>$ o $\geq$ y x es la incógnita.

Ejemplos

1. $2x + 6 < 0$
2. $x - 1 \leq 0$
3. $5x > 0$
4. $2 - x \geq 0$

Problema 1.

La inecuación: $(a^2 - 9)x^2 + (a - 3)x + 2a \geq 0$, es lineal de parámetro a .

Hallar el valor de $M = a^2 - 3a$

A) 12

B) 14

C) 16

D) 18

E) 20

Problema 2.

Resolver $3ax + 2a \geq ax + 12a$, siendo $a^{501} < 0$

A) $\langle -\infty, 5]$ B) $\langle -\infty, 1]$ C) $\langle -\infty, -5]$ D) $\langle -\infty, 2]$ E) $\emptyset$

INECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Definición:

Una inecuación de segundo grado, es aquella inecuación que tiene la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c < 0$$

Donde a, b y c son números reales ($a \neq 0$) y se puede cambiar $<$ por alguna de los símbolos $\leq, >$ o $\geq$ y x es la incógnita.

Son inecuaciones cuadráticas

1. $3x^2 - 6x + 5 < 0$
2. $x^2 - 1 \leq 0$
3. $-2x^2 + x > 0$
4. $2 - x^2 \geq 0$

NOTA

Sea la inecuación cuadrática

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

Se puede expresar de la forma:

$$(x - 1)(x - 3) > 0$$

Analizamos los signos de los siguientes términos

_____ 1 _____ 3 _____

$(x - 1)$	-	+	+
$(x - 3)$	-	-	+
$(x - 1)(x - 3)$	+	-	+



$$C.S. = \langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$$

Método de los valores críticos.

Se usa para resolver inecuaciones polinomiales de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 < 0$$

Donde $a_n \neq 0$ y pudiéndose cambiar $<$ por alguna de los símbolos $\leq$, $>$ o $\geq$.

Procedimiento:

1. Pase todos los términos a uno de los lados de la inecuación, procurando que el coeficiente principal sea positivo.
2. Factorice la expresión en los reales.
3. Halle los valores críticos igualando a cero cada uno de los factores lineales.
4. Ubique los valores críticos en la recta real, las cual genera zonas. Comenzando desde la zona ubicada a la derecha, se asigna a dicha región el signo $+$ y la región ubicada a su izquierda se le asigna su signo correspondiente.
5. Tome la zona $+$ o $-$ dependiendo de la desigualdad.

Ejemplo

Resolver: $5x^2 + 2x \leq 3x^2 + 9x - 6$

Resolución

1. Pasando todos los términos al lado izquierdo:

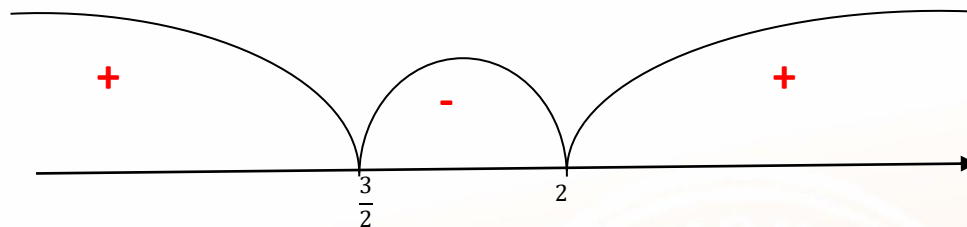
$$2x^2 - 7x + 6 \leq 0$$

2. Factorizando con aspa simple

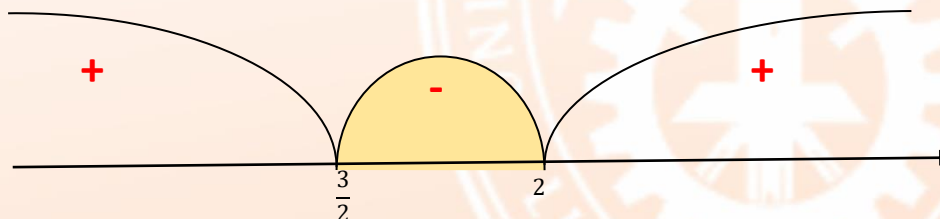
$$(2x - 3)(x - 2) \leq 0$$

3. Los valores críticos son: $\frac{3}{2}$ y 2.

4. Ubicando los valores críticos en la recta numérica y dividiendo en zonas



5. Tomando la zona negativa ya que queremos que $2x^2 - 7x + 6$ sea no positiva.



$$\text{C.S.} = \left[\frac{3}{2}, 2 \right]$$

TIPOS:**Caso I:**

Si: $\Delta > 0$ y $ax^2 + bx + c = 0$ tiene por raíces reales α y β
con $\alpha < \beta$

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

Vamos asumir que $a > 0$.

1. $ax^2 + bx + c > 0$, se tiene que C. S. = $\langle -\infty, \alpha \rangle \cup \langle \beta, +\infty \rangle$
2. $ax^2 + bx + c \geq 0$, se tiene que C. S. = $\langle -\infty, \alpha \rangle \cup [\beta, +\infty)$
3. $ax^2 + bx + c < 0$, se tiene que C. S. = $\langle \alpha, \beta \rangle$
4. $ax^2 + bx + c \leq 0$, se tiene que C. S. = $[\alpha, \beta]$

Caso II:

Si: $\Delta = 0$ y $ax^2 + bx + c = 0$ las raíces son α y β con $\alpha = \beta$

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$$

Vamos asumir que $a > 0$.

1. $ax^2 + bx + c > 0$, se tiene que C. S. = $\langle -\infty, \alpha \rangle \cup \langle \alpha, +\infty \rangle$
2. $ax^2 + bx + c \geq 0$, se tiene que C. S. = $\mathbb{R}$
3. $ax^2 + bx + c < 0$, se tiene que C. S. = $\emptyset$
4. $ax^2 + bx + c \leq 0$, se tiene que C. S. = $\{\alpha\}$

NOTA

I) Sea la inecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$\text{C. S.} = \{\alpha\} \Leftrightarrow a > 0 \wedge \Delta = 0$$

II) Sea la inecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$\text{C. S.} = \{\alpha\} \Leftrightarrow a < 0 \wedge \Delta = 0$$

PROBLEMA 3.

Si la inecuación: $kx^2 - 2x + (2k - 1) \leq 0$, tiene solución única.
Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. $k \in [-1, 1]$

II. $k = 1$

III. $\{k\} \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$

A) VVV

B) VFV

C) FVV

D) FFF

E) FVF

Caso III:

Si: $\Delta < 0$ y $ax^2 + bx + c = 0$, sus raíces son números no reales.

Vamos asumir que $a > 0$.

1. $ax^2 + bx + c > 0$, se tiene que C. S. = $\mathbb{R}$
2. $ax^2 + bx + c \geq 0$, se tiene que C. S. = $\mathbb{R}$
3. $ax^2 + bx + c < 0$, se tiene que C. S. = $\emptyset$
4. $ax^2 + bx + c \leq 0$, se tiene que C. S. = $\emptyset$

Teorema del Trinomio

Consideremos la inecuación cuadrática, tenemos los siguientes teoremas:

a) Trinomio Positivo

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c > 0 \Leftrightarrow a > 0 \wedge \Delta < 0$$

b) Trinomio No Negativo

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow a < 0 \wedge \Delta \leq 0$$

PROBLEMA 4.

Si $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c < 0$. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. $a(a^2 + 1) > 0$

II. $a(c - 1) > 0$

III. $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 - bx + c < 0$

A) VVV

B) VFV

C) FVV

D) FFF

E) FVF

PROBLEMA 5.

Si $\forall x \in \mathbb{R}, kx^2 + (k - 1)x + k \geq 0$. Considerando $k \neq 0$, Indique los valores de k .

A) $[0, \frac{1}{3})$

B) $\mathbb{R} \setminus [-1, \frac{1}{3}]$

C) $\langle 0, \frac{1}{3}]$

D) $[\frac{1}{3}, +\infty >$

E) $< 0, +\infty >$

INECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

Definición:

Una inecuación de grado superior es aquella inecuación polinomial de grado mayor a 2.

Ejemplos

1. $x^3 - 4x^2 - x + 4 < 0$

2. $x^{10} - 4 \leq 0$

3. $(x^3 - 4)^2 (x - 1)^4 (x + 4) > 0$

Nota

Para resolver este tipo de inecuaciones **usamos el método de los valores críticos**, procurando simplificar las expresiones positivas o negativas para así reducir la expresión.

Ejemplo

Resolver

$$-x^3 + 4x^2 + x - 4 < 0$$

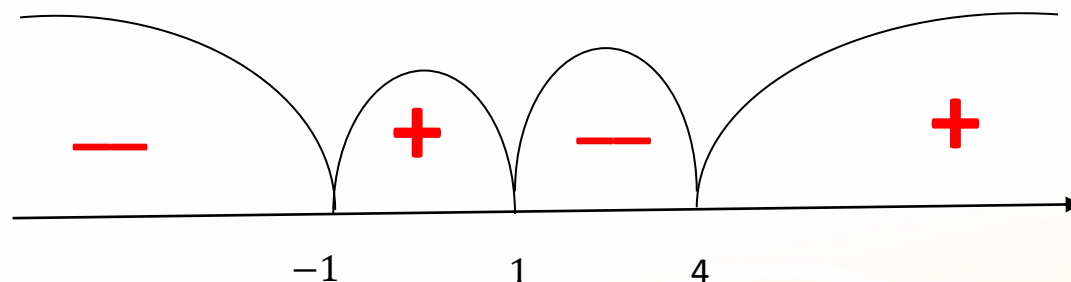
Resolución

1. Factorizando la expresión

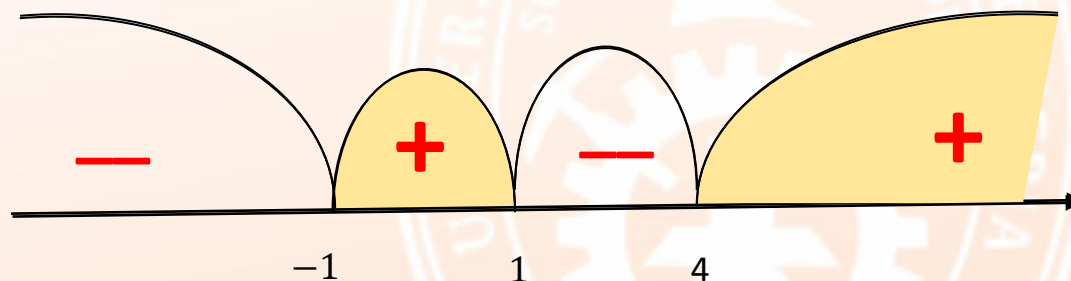
$$(x + 1)(x - 1)(x - 4) > 0$$

2. Los valores críticos son: -1,1,4.

3. Ubicando los valores críticos en la recta numérica y dividiendo en zonas



4. Tomando la zona positiva ya que queremos que expresión sea positiva.



$$C.S. =]-1, 1[\cup]4, +\infty[$$

PROBLEMA 6.

Calcule el valor de $(a + b)^c$, tal que la inecuación

$$(x - 3)^2(x - 2)(x + 4) \leq 0$$

Tiene como conjunto solución C. S. = $[a, b] \cup \{c\}$.

A) $1/2$

B) $-1/4$

C) $1/8$

D) $-1/8$

E) -8

NOTA

I) Sea la inecuación

$$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1 > 0$$

Se tiene que C.S. = $\mathbb{R}$

II) Sea la inecuación

$$x^n - x^{n-1} + x^{n-2} - \dots + x^2 - x + 1 > 0$$

Se tiene que C.S. = $\mathbb{R}$

Donde $n \in \mathbb{N}$ un número par.

PROBLEMA 7.

Halle la suma de los valores enteros de m para la inecuación

$$(x^2 - mx + m)(x - 2)(x + 1) < 0$$

Tiene como conjunto solución C. S. = $\langle -1, 2 \rangle$, con $m \neq 4$.

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

Ejemplo

Resolver: $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 6x + 8) < 0$

Resolución

1. Notamos que:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$$

2. Eliminando el factor y factorizando

$$(x - 1)(x - 2)(x - 4) < 0$$

3. El conjunto solución es:

$$C.S = \langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 2, 4 \rangle$$

INECUACIONES

Teorema

Siendo $p(x)$ y $q(x)$ polinomios, $n \in \mathbb{N}$, tendremos:

$$1. [p(x)]^{2n}q(x) > 0 \leftrightarrow p(x) \neq 0 \wedge q(x) > 0$$

$$2. [p(x)]^{2n}q(x) < 0 \leftrightarrow p(x) \neq 0 \wedge q(x) < 0$$

$$3. [p(x)]^{2n}q(x) \geq 0 \leftrightarrow p(x) = 0 \vee q(x) \geq 0$$

$$4. [p(x)]^{2n}q(x) \leq 0 \leftrightarrow p(x) = 0 \vee q(x) \leq 0$$

INECUACIONES

Teorema

Siendo $p(x)$ y $q(x)$ polinomios, $n \in \mathbb{N}$, tendremos:

$$1. [p(x)]^{2n+1}q(x) > 0 \Leftrightarrow p(x)q(x) > 0$$

$$2. [p(x)]^{2n+1}q(x) < 0 \Leftrightarrow p(x)q(x) < 0$$

$$3. [p(x)]^{2n+1}q(x) \geq 0 \Leftrightarrow p(x)q(x) \geq 0$$

$$4. [p(x)]^{2n+1}q(x) \leq 0 \Leftrightarrow p(x)q(x) \leq 0$$

Ejemplo

Resolver

$$(x - 2)^4(x + 1)^2(x - 1)(x + 3) < 0$$

Resolución

Notemos que los exponentes son números pares, por lo que usaremos el teorema anterior.

$$(x - 2 \neq 0 \wedge x + 1 \neq 0) \wedge (x - 1)(x + 3) < 0$$

$$(x \neq 2 \wedge x \neq -1) \wedge (x - 1)(x + 3) < 0$$

Por lo que C.S = $\langle -3, 1 \rangle \setminus \{-1\}$

INECUACIONES RACIONALES

Definición:

Una inecuación se dirá que es racional cuando sea de la forma:

$$\frac{p(x)}{q(x)} < 0$$

Donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios no nulos y $q(x)$ es de grado mayor a cero, se puede cambiar $<$ por alguna de los símbolos $\leq$, $>$ o $\geq$.

Para resolver una inecuación racional se usará una ampliación del método de los puntos críticos.

Teorema

Sean

$$\text{I) Si } \frac{p(x)}{q(x)} < 0 \Leftrightarrow p(x)q(x) < 0$$

$$\text{II) Si } \frac{p(x)}{q(x)} > 0 \Leftrightarrow p(x)q(x) > 0$$

$$\text{III) Si } \frac{p(x)}{q(x)} \leq 0 \Leftrightarrow p(x)q(x) \leq 0 \wedge q(x) \neq 0$$

$$\text{IV) Si } \frac{p(x)}{q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow p(x)q(x) \geq 0 \wedge q(x) \neq 0$$

Ejemplo

Resolver

$$\frac{(x^2 - 7x + 6)(x - 3)^5}{x^4 - 1} < 0$$

Resolución

1. Factorizando el numerador y denominador.

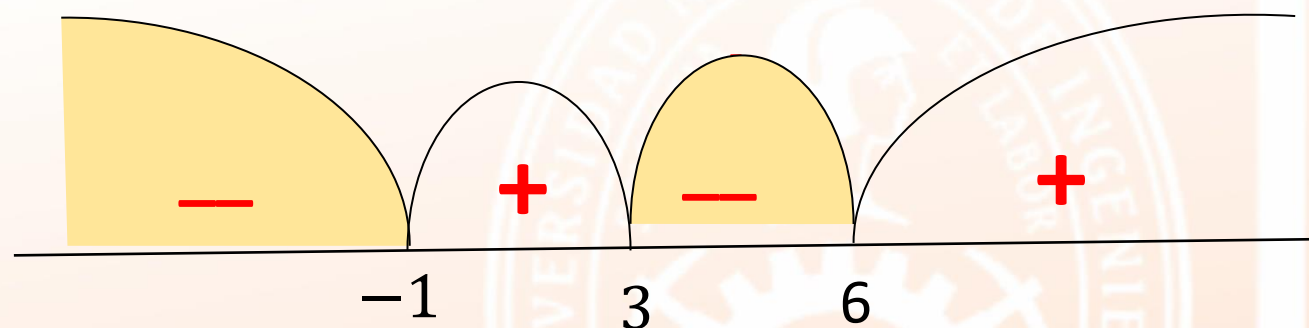
$$\frac{(x - 6)(x - 1)(x - 3)}{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)} < 0$$

De donde $x \neq \pm 1$. Simplificando

$$\frac{(x - 6)(x - 3)}{x + 1} < 0$$

2. Los valores críticos son: -1,3 y 6.

3. Ubicando los valores críticos en la recta numérica y dividiendo en zonas



$$C.S. = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 3, 6 \rangle$$

PROBLEMA 8.

Determine el conjunto solución de la inecuación

$$\left(-1 + x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{x-3}{x-4}\right) > 0$$

Tiene como conjunto solución C. S. = $\langle a, b \rangle \cup \langle c, +\infty \rangle$.

Halle el valor de $M = a + bc$.

A) 12

B) 14

C) 16

D) 18

E) 20